

بسمه تعالی			
سؤالات درس : آمار و احتمال	رشته : ریاضی و فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان : ۱۴۰۳ / ۳ / ۳	تعداد صفحه : ۳
آزمون شبیه سازی امتحانات نهایی سال ۱۴۰۳		گروه ریاضی استان همدان	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

۱	مفاهیم زیر را تعریف کنید. الف) نمونه گیری سامانمند: ب) گزاره نما:	۱
۲	جاهای خالی زیر را پر کنید. الف) اگر داده های نمونه زیاد شود چندبر فراوانی بافت نگاشت به نمودار.....شباهت خواهد داشت. ب)مشخصه ای عددی است که توصیف کننده جنبه ای خاص از نمونه است. پ) اگر یک روش نمونه گیری از نمونه گیری ایده آل فاصله بگیرد و به سمت خاصی انحراف پیدا کند می گوییم آن روش.....است. ت) داده دور افتاده داده ها را تحت تاثیر قرار می دهد اما تاثیری بر میانه داده ها ندارند. ث) اگر تمام داده ها با در عدد ثابت c ضرب شوند، میانگین آن ها می شود.	۱/۲۵
۳	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف) $A \cup U = U$ ب) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل باشد. پ) اگر تمام داده ها با عدد ثابت c جمع شوند، انحراف معیار آن ها هم با c جمع می شود. درست ☐ نادرست ☐ ت) اگر دو پیشامد غیر تهی A, B ناسازگار باشند، آن گاه مستقل اند. درست ☐ نادرست ☐	۱
۴	به سوالات چهار گزینه ای زیر پاسخ دهید. (فقط یک گزینه صحیح است). الف) هرگاه دامنه متغیر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ باشد، ارزش کدام گزینه سوری درست است؟ (۱) $\exists x \in A ; x + 4 = 10$ (۳) $\forall x \in A ; x + 2 \geq 9$ (۲) $\exists x \in A ; x + 3 \leq 4$ (۴) $\forall x \in A ; x + 1 < 6$ ب) در فضای نمونه ای متناهی با احتمال غیر هم شانس ، اگر S فضای نمونه ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیر مجموعه k عضوی S باشد ، همواره داریم : (۱) $P(S) = 0$ (۲) $0 \leq P(A) \leq \frac{1}{p}$ (۳) $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$ (۴) $P(S) = P(A)$ پ) در جامعه ای انحراف معیار ۳ است. انحراف معیار بر آورد میانگین برای اندازه نمونه ۹۰۰ کدام است؟ (۱) $0/2$ (۲) $0/3$ (۳) $0/1$ (۴) قابل محاسبه نیست	۲

بسمه تعالی			
سؤالات درس : آمار و احتمال	رشته : ریاضی و فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان : ۱۴۰۳/۳/۱۴	تعداد صفحه : ۳
آزمون شبیه سازی امتحانات نهایی سال ۱۴۰۳		گروه ریاضی استان همدان	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

	ت) در یک مسابقه تیر اندازی احتمال اینکه علی به هدف بزند $\frac{1}{8}$ و این احتمال برای محمد $\frac{7}{10}$ است. احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند کدام است؟ $\frac{8}{18}$ (۱) $\frac{7}{80}$ (۲) (۳) اطلاعات کافی نیست (۴) $\frac{66}{80}$																									
۵	با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید : $(\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q)$	۱/۵																								
۶	الف) به روش عضوگیری یکی از قوانین دمورگان را ثابت کنید. ب) به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید : $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$	۱/۵																								
۷	اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{6}$ و $P(A B) = \frac{1}{3}$ باشند آنگاه $P(A \cup B)$ را محاسبه کنید.	۱																								
۸	اگر A یک پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشد ثابت کنید: $P(A') = 1 - P(A)$	۱																								
۹	سه ظرف داریم. در اولی ۲ مهره سبز و ۲ مهره قرمز و در دومی ۱ مهره سبز و ۲ مهره قرمز و در سومی ۲ مهره سبز و ۴ مهره قرمز وجود دارد. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره بیرون می‌آوریم. الف) به چه احتمالی این مهره سبز است؟ ب) اگر این مهره سبز باشد به چه احتمالی از ظرف سوم خارج شده است؟	۱/۲۵																								
۱۰	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع اعداد اول ۲ برابر سایر اعداد است. تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد ظاهر شده بیشتر از ۳ باشد را بیابید.	۱																								
۱۱	اعداد زیر را به سه دسته طبقه‌بندی کنید و جدول فراوانی آن را رسم کنید. ۲ و ۴ و ۵ و ۷ و ۶ و ۷ و ۳ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۱	۱/۲۵																								
۱۲	کارنامه زیر نمرات یک دانش آموز به همراه ضریب اهمیت هر درس داده شده است. الف) معدل این دانش آموز را بدون احتساب ضریب هر درس حساب کنید. ب) معدل این دانش آموز را با احتساب ضریب هر درس حساب کنید.	۱																								
<table><tr><td>درس</td><td>ریاضی</td><td>فیزیک</td><td>شیمی</td><td>ادبیات</td><td>دینی</td><td>زبان</td><td>عربی</td></tr><tr><td>نمره</td><td>۱۹</td><td>۱۴</td><td>۱۰/۵</td><td>۱۸</td><td>۱۹</td><td>۱۶</td><td>۱۲</td></tr><tr><td>ضریب</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td></tr></table>			درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	دینی	زبان	عربی	نمره	۱۹	۱۴	۱۰/۵	۱۸	۱۹	۱۶	۱۲	ضریب	۴	۳	۱	۲	۴	۲	۱
درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	دینی	زبان	عربی																			
نمره	۱۹	۱۴	۱۰/۵	۱۸	۱۹	۱۶	۱۲																			
ضریب	۴	۳	۱	۲	۴	۲	۱																			

بسمه تعالی			
سؤالات درس : آمار و احتمال	رشته : ریاضی و فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان : ۱۴۰۳ / ۳ / ۱۴	تعداد صفحه : ۳
آزمون شبیه سازی امتحانات نهایی سال ۱۴۰۳		گروه ریاضی استان همدان	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

۱۳	در داده های آماری ۱۵ و ۹ و ۱۳ و ۵ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۳ و ۷ و ۱۷ و ۱۵ و ۱۹ و ۱۰ الف) نمودار جعبه ای را رسم کنید. ب) مد داده ها را بیابید.	۱/۵
۱۴	ضریب تغییرات داده های ۳ و ۴ و ۶ و ۷ و ۶ را حساب کنید.	۱/۵
۱۵	اگر میانگین در آمد سالانه ۵ کارمند یک وزارتخانه که به عنوان نمونه انتخاب کرده ایم ۱۰ میلیون تومان و انحراف معیار درآمد جامعه $\frac{\sqrt{5}}{2}$ باشد، با اطمینان ۹۵ درصد بازه ای را برای میانگین درآمدهای کارمندان وزارتخانه بر آورد کنید.	۱
۱۶	میانگین جامعه ای با اطمینان بیشتر از ۹۵ درصد بازه $[۳۰, ۸۰]$ برآورد شده است. اگر انحراف معیار جامعه ۷۵ باشد، مجموع اعضای نمونه را محاسبه کنید.	۱/۲۵
	((موفق باشید))	جمع نمره
		۲۰

راهنمای تصحیح

ردیف	سؤالات	نمره
۱	مفاهیم زیر را تعریف کنید. نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات با هم برابرند. از طبقه اول واحد‌های به تعداد ۱۵ (الف) نمونه‌گیری سامانمند: انتخاب می‌شود و با همان رسم از طبقات دیگر این کار انجام می‌شود. ب) گزاره نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایی نمره‌ای می‌دارد به جایی متغیر و گزاره تبدیل می‌شود.	۱
۲	جاهای خالی زیر را پر کنید. الف) اگر داده‌های نمونه زیاد شود چندبر فراوانی بافت نگاشت به نمودار شباهت خواهد داشت. ب) مشخصه‌ای عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است. پ) اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمت خاصی انحراف پیدا کند می‌گوییم آن روش است. ت) داده دور افتاده داده‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد اما تاثیری بر میانه داده‌ها ندارند. ث) اگر تمام داده‌ها با در عدد ثابت c ضرب شوند، میانگین آن‌ها می‌شود.	۱/۲۵
۳	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) $A \cup U = U$ ☒ درست ☐ نادرست ب) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل باشد. ☒ درست ☐ نادرست پ) اگر تمام داده‌ها با عدد ثابت c جمع شوند، انحراف معیار آن‌ها هم با c جمع می‌شود. درست ☐ نادرست ☒ ت) اگر دو پیشامد غیر تهی A, B ناسازگار باشند، آن‌گاه مستقل‌اند. درست ☐ نادرست ☒	۱
۴	به سوالات چهار گزینه‌ای زیر پاسخ دهید. (فقط یک گزینه صحیح است). الف) هرگاه دامنه متغیر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ باشد، ارزش کدام گزینه سوری درست است؟ (۱) $\exists x \in A ; x + 4 = 10$ (۳) $\forall x \in A ; x + 2 \geq 9$ (۲) $\exists x \in A ; x + 3 \leq 4$ (۴) $\forall x \in A ; x + 1 < 6$	۲

ب) در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیر هم‌شانس، اگر S فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیر مجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

$$P(S) = 1 \quad (1) \quad 0 \leq P(A) \leq \frac{1}{n} \quad (2)$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (3) \quad P(S) = P(A) \quad (4)$$

پ) در جامعه‌ای انحراف معیار ۳ است. انحراف معیار بر آورد میانگین برای اندازه نمونه ۹۰۰ کدام است؟
 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{900}} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ (۴) قابل محاسبه نیست (۳) ۰/۱ (۲) ۰/۳ (۱) ۰/۲

ت) در یک مسابقه تیر اندازی احتمال اینکه علی به هدف بزند $\frac{1}{8}$ و این احتمال برای محمد $\frac{7}{10}$ است. احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند کدام است؟

$$\frac{8}{18} \quad (1) \quad \frac{7}{80} \quad (2) \quad \text{اطلاعات کافی نیست} \quad (3) \quad \frac{66}{80} \quad (4)$$

۵ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید: $(\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

۶ الف) به روش عضوگیری یکی از قوانین دموگن را ثابت کنید.

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{ص ۱۲۵} \\
x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$$

ب) به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

$$\begin{aligned} \text{کتاب} \quad A \cap (B - C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C') = (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C') \\ &= \emptyset \cup (A \cap B \cap C') = A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C) \end{aligned}$$

۷ اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{6}$ و $P(A|B) = \frac{1}{3}$ باشند آنگاه $P(A \cup B)$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{6}} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{18} \\ P(A \cup B) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{9 + 6 - 2}{36} = \frac{13}{36} \end{aligned}$$

۸	اگر A یک پیشامد در فضای نمونه ای S باشد ثابت کنید: $P(A') = 1 - P(A)$ $P(S) = P(A \cup A') = 1 \Rightarrow P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Rightarrow 1 = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$																								
۹	سه ظرف داریم. در اولی ۲ مهره سبز و ۲ مهره قرمز و در دومی ۱ مهره سبز و ۲ مهره قرمز و در سومی ۲ مهره سبز و ۴ مهره قرمز وجود دارد. یکی از ظرفها را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره بیرون می‌آوریم. (الف) به چه احتمالی این مهره سبز است؟ (ب) اگر این مهره سبز باشد به چه احتمالی از ظرف سوم خارج شده است؟ الف) $P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4+3+3}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ ب) $P(B C) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{P(B) = \frac{5}{6}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{12} \times \frac{6}{5} = \frac{1}{10}$																								
۱۰	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع اعداد اول ۲ برابر سایر اعداد است. تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد ظاهر شده بیشتر از ۳ باشد را بیابید. $P(1) = P(2) = P(4) = x \rightarrow P(3) = P(5) = P(6) = 2x$ $x + x + x + 2x + 2x + 2x = 1 \rightarrow 9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}$ $P(x > 3) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$																								
۱۱	اعداد زیر را به سه دسته طبقه بندی کنید و جدول فراوانی آن را رسم کنید. ۱۱ و ۱۶ و ۱۷ و ۳ و ۷ و ۷ و ۶ و ۶ و ۷ و ۵ و ۲ و ۵ و ۲ و ۴ و ۲ $\bar{C} = \frac{R}{K} = \frac{17-2}{5} = \frac{15}{5} = 3$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>دسته</th> <th>[۲, ۷]</th> <th>[۷, ۱۲]</th> <th>[۱۲, ۱۷]</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>فرکانس</td> <td>۱۰</td> <td>۴</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td></td> <td>$\frac{1}{10}$</td> <td>$\frac{1}{10}$</td> <td>$\frac{1}{10}$</td> </tr> </tbody> </table>	دسته	[۲, ۷]	[۷, ۱۲]	[۱۲, ۱۷]	فرکانس	۱۰	۴	۲		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$												
دسته	[۲, ۷]	[۷, ۱۲]	[۱۲, ۱۷]																						
فرکانس	۱۰	۴	۲																						
	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$																						
۱۲	کارنامه زیر نمرات یک دانش آموز به همراه ضریب اهمیت هر درس داده شده است. (الف) معدل این دانش آموز را بدون احتساب ضریب هر درس حساب کنید. (ب) معدل این دانش آموز را با احتساب ضریب هر درس حساب کنید. <table border="1"> <thead> <tr> <th>درس</th> <th>ریاضی</th> <th>فیزیک</th> <th>شیمی</th> <th>ادبیات</th> <th>دینی</th> <th>زبان</th> <th>عربی</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>نمره</td> <td>۱۹</td> <td>۱۴</td> <td>۱۰/۵</td> <td>۱۸</td> <td>۱۹</td> <td>۱۶</td> <td>۱۲</td> </tr> <tr> <td>ضریب</td> <td>۴</td> <td>۳</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۴</td> <td>۲</td> <td>۱</td> </tr> </tbody> </table> الف) $\bar{X} = \frac{101.0}{7} = 14.43$ ب) $\bar{X} = \frac{19 \times 4 + 14 \times 3 + 10.5 \times 1 + 18 \times 2 + 19 \times 4 + 16 \times 2 + 12 \times 1}{4 + 3 + 1 + 2 + 4 + 2 + 1} = \frac{176 + 42 + 10.5 + 36 + 76 + 32 + 12}{17} = \frac{286.5}{17} = 16.85$	درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	دینی	زبان	عربی	نمره	۱۹	۱۴	۱۰/۵	۱۸	۱۹	۱۶	۱۲	ضریب	۴	۳	۱	۲	۴	۲	۱
درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	دینی	زبان	عربی																		
نمره	۱۹	۱۴	۱۰/۵	۱۸	۱۹	۱۶	۱۲																		
ضریب	۴	۳	۱	۲	۴	۲	۱																		

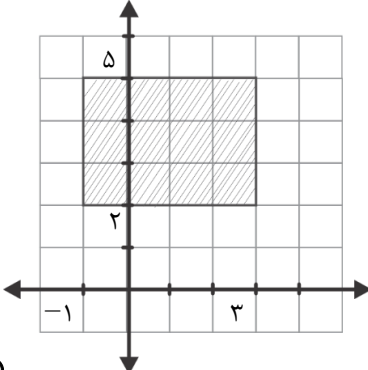
۱/۵	در داده‌های آماری ۱۵ و ۹ و ۱۳ و ۵ و ۴ و ۱۵ و ۱۳ و ۷ و ۷ و ۱۵ و ۱۹ و ۱ الف) نمودار جعبه ای را رسم کنید. ب) مد داده ها را بیابید. الف ۱/۵ ۱۸ = ۱۵ + ۳	۱۳
۱/۵	ضریب تغییرات داده‌های ۳ و ۴ و ۶ و ۷ را حساب کنید. ۱/۲۵ $\bar{X} = \frac{3+4}{2} = 3.5$ $\sigma^2 = \frac{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2}{6} = \frac{12}{6} = 2 \rightarrow \sigma = \sqrt{2}$ $CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\sqrt{2}}{3.5}$ ۱/۲۵	۱۴
۱	اگر میانگین در آمد سالانه ۵ کارمند یک وزارتخانه که به عنوان نمونه انتخاب کرده‌ایم ۱۰ میلیون تومان و انحراف معیار درآمد جامعه $\frac{\sqrt{5}}{2}$ باشد، با اطمینان ۹۵ درصد بازه‌ای را برای میانگین درآمدهای کارمندان وزارتخانه بر آورد کنید. ۱/۲۵ $\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}$ $10 - \frac{1.96 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \leq \mu \leq 10 + \frac{1.96 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow 9 \leq \mu \leq 11$ ۱/۲۵	۱۵
۱/۲۵	میانگین جامعه‌ای با اطمینان بیشتر از ۹۵ درصد بازه $[30, 80]$ برآورد شده است. اگر انحراف معیار جامعه ۷۵ باشد، مجموع اعضای نمونه را محاسبه کنید. ۱/۲۵ $\bar{x} = \frac{30 + 80}{2} = 55$ $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow$ $\sqrt{n} = 4 \Rightarrow n = 16$ ۱/۲۵ $55 = \frac{\sum x_i}{16} \Rightarrow \sum x_i = 55 \times 16 = 880$ ۱/۲۵	۱۶
۲۰	جمع نمره	((موفق باشید))

باسمه تعالی

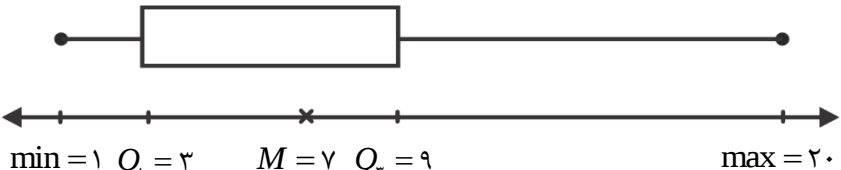
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: آمار و احتمال		رشته: ریاضی - فیزیک		ساعت شروع : ۱۳/۱۵		مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه	
نام و نام خانوادگی :		سال یازدهم متوسطه دوم		تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۲/۱۹		تعداد صفحه : ۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد در نوبت عصر		سال تحصیلی: ۱۴۰۳- ۱۴۰۲		اداره سنجش آموزش و پرورش استان فارس			
ردیف	سؤالات صفحه ۱						نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوشش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. ب) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه A' و B نیز مستقل هستند. پ) اگر همه داده‌ها را پنج برابر کنیم، ضریب تغییرات آن‌ها نیز پنج برابر می‌شود. ت) اگر در فرمول بازه‌ی اطمینان برای میانگین جامعه، اندازه‌ی نمونه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان کاهش می‌یابد.						☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) ارزش گزاره $p \rightarrow p \vee q$ همواره است. ب) به هر عضو فضای نمونه یک می‌گویند. پ) شاخص کیفیت هوا (AQI) متغیری برای بیان کیفیت روزانه هواست. ت) مشخصه‌ای عددی که توصیف کننده‌ی جنبه‌ی خاصی از نمونه است و از داده‌های نمونه بدست می‌آید، نام دارد.						۱
۳	در سؤالات زیر گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) اگر $A = \{۲, x + ۲y, ۴\}$ و $B = \{۴, ۵, x\}$ دو مجموعه برابر باشند، حاصل $x + y$ چیست؟ ۵ (۱) ۳/۵ (۲) ۲ (۳) ۱/۵ (۴) ب) یک سکه و دو تاس همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال این که سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند چقدر است؟ ۵/۷۲ (۱) ۱/۷۲ (۲) ۱/۳۶ (۳) ۱/۲۴ (۴) پ) برای متغیرهای کیفی از کدام نمودارها استفاده می‌شود؟ ۱) دایره ای و میله‌ای ۲) دایره‌ای و بافت نگاشت ۳) میله‌ای و بافت نگاشت ۴) هیچکدام ت) اگر اندازه نمونه‌ای ۱۰ برابر شود، انحراف معیار برآورد میانگین چندبرابر می‌شود؟ ۱/۱۰ (۱) ۱۰ (۲) $\sqrt{۱۰}$ (۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ (۴)						۲
۴	با استفاده از جدول ارزش‌ها، هم‌ارزی روبرو را نشان دهید. $p \wedge (q \vee p) \equiv p$						۱
۵	الف) ارزش گزاره سوری زیر را مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید. $\exists y \in N \quad ; \quad \frac{y+۳}{۵} = ۰$						۰/۵
۶	اگر $A = [-۱, ۳]$ و $B = [۲, ۵]$ باشند، نمودار $A \times B$ را به‌عنوان بخشی از صفحه مختصاتی هاشور بزیند.						۰/۵
۷	با استفاده از خواص جبر مجموعه‌ها تساوی زیر را ثابت کنید. $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$						۰/۷۵
۸	اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعه‌ی A چند عضو دارد ؟						۰/۷۵

سؤالات امتحان شبه نهایی درس: آمار و احتمال		رشته: ریاضی - فیزیک		ساعت شروع : ۱۳/۱۵		مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه																
نام و نام خانوادگی :		سال یازدهم متوسطه دوم		تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۲/۱۹		تعداد صفحه : ۲																
دانش آموزان و داوطلبان آزاد در نوبت عصر		سال تحصیلی: ۱۴۰۳ - ۱۴۰۲		اداره سنجش آموزش و پرورش استان فارس																		
ردیف	صفحه دوم						نمره															
۹	الف) اگر تاسی را پی در پی پرتاب کنیم، مشخص کنید دو پیشامد زیر با یکدیگر سازگارند یا ناسازگار؟ A : برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید. B : تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید. ب) عددی به تصادف از اعداد ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، ولی بر ۴ بخش پذیر نباشد را حساب کنید.						۰/۵															
۱۰	اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ی یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C')$ را حساب کنید.						۱															
۱۱	احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس ۷۰ درصد می‌باشد. احتمال اینکه حداقل یکی از آن‌ها در این درس قبول شود را بیابید.						۱															
۱۲	در دو جعبه به ترتیب ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه‌ی اول ۴ لامپ و در جعبه‌ی دوم ۳ لامپ معیوب وجود دارد. از هر کدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه‌ی جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه‌ی جدید، معیوب باشد چقدر است؟						۱															
۱۳	الف) اگر در یک نمونه، فراوانی نسبی داده‌ای $\frac{3}{10}$ و مجموع کل فراوانی‌ها ۳۰ باشد، فراوانی داده ذکر شده را حساب کنید. ب) مد یا مدهای داده‌های زیر را بیابید.						۰/۵ ۰/۵															
۱۴	کارنامه دانش‌آموزی به شرح زیر در چهار درس با تعداد واحد آن‌ها اعلام شده است. اگر معدل (میانگین) وزن دار او ۱۶ باشد، نمره درس آمار و احتمال او چقدر بوده است؟ <table><tr><td>درس‌ها</td><td>حسابان ۱</td><td>هندسه ۲</td><td>آمار و احتمال</td><td>فیزیک ۲</td></tr><tr><td>نمره</td><td>۱۵</td><td>۱۷</td><td>x</td><td>۱۷</td></tr><tr><td>تعداد واحد</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۲</td><td>۴</td></tr></table>						درس‌ها	حسابان ۱	هندسه ۲	آمار و احتمال	فیزیک ۲	نمره	۱۵	۱۷	x	۱۷	تعداد واحد	۳	۲	۲	۴	۱
درس‌ها	حسابان ۱	هندسه ۲	آمار و احتمال	فیزیک ۲																		
نمره	۱۵	۱۷	x	۱۷																		
تعداد واحد	۳	۲	۲	۴																		
۱۵	برای ۱۱ داده زیر نمودار جعبه‌ای رسم کنید و دامنه میان چارکی را بیابید. ۸ ، ۲ ، ۵ ، ۱۱ ، ۱ ، ۷ ، ۷ ، ۹ ، ۳ ، ۲۰ ، ۴						۲															
۱۶	الف) اگر برای تعدادی داده، واریانس را ۴ و میانگین را ۱۰۰ محاسبه کرده باشیم، ضریب تغییرات چه مقداری خواهد داشت؟ ب) اگر عمر لاستیک‌های تولیدی ۲ کارخانه‌ی A و B دارای ضریب تغییرات به ترتیب $\frac{9}{10000}$ و $\frac{2}{1000}$ باشند کدام کارخانه عملکرد مطلوب‌تری داشته است؟						۰/۷۵ ۰/۲۵															
۱۷	الف) نمونه‌گیری تصادفی ساده را تعریف کنید. ب) کدام روش برای گردآوری هریک از داده‌های زیر مناسب است ؟ A : تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک تقاطع در یک بازه زمانی کوتاه B : پژوهش درباره‌ی مسایل فرهنگی موثر در کاهش ترافیک ج) فرآیند نتیجه‌گیری درباره‌ی پارامترهای جامعه براساس نمونه چه نام دارد؟						۰/۵ ۰/۵ ۰/۵															
۱۸	الف) اگر طی مطالعاتی بدانیم که انحراف معیار درآمد هر فرد در کشور ۲ میلیون تومان است انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه را برای نمونه‌ای با اندازه‌ی ۲۵ نفر محاسبه کنید. ب) با استفاده از یک نمونه تصادفی با اندازه ۱۰۰ که دارای میانگین ۴ است، بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه که انحراف معیارش ۲ می‌باشد، بدست آورید.						۰/۵ ۱															
جمع	موفق و سربلند باشید						۲۰															

باسمه تعالی

کلید سوالات امتحان شبه نهایی درس: آمار و احتمال		رشته: ریاضی - فیزیک		ساعت شروع: ۱۳/۱۵		مدت امتحان : ۱۱۰ دقیقه																					
		سال یازدهم متوسطه دوم		تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۲/۱۹		تعداد صفحه : ۳																					
		دانش آموزان و داوطلبان آزاد در نوبت عصر سال تحصیلی: ۱۴۰۲-۱۴۰۳																									
اداره سنجش آموزش و پرورش استان فارس																											
ردیف		صفحه ۱																									
نمره																											
۱	۱	هر مورد (۰/۲۵) الف) نادرست (تمرین ۸ ص ۱۵) ب) درست (تمرین ۳ ص ۶۷) پ) نادرست (مشابه تمرین ۶ ص ۹۴) ت) درست (تمرین ۴ ص ۱۱۹)																									
۲	۲	هر مورد (۰/۲۵) الف) درست (مثال ص ۸) ب) برآمد (تعریف ص ۳۸) پ) پیوسته (فعالیت ص ۷۴) ت) آماره (تعریف ص ۱۰۹)																									
۳	۳	هر مورد (۰/۵) الف) گزینه ۲ (مشابه تمرین ۳ ص ۳۳) ب) گزینه ۲ (تمرین ۷ ص ۶۸) پ) گزینه ۱ (تمرین ۳ ص ۷۷) ت) گزینه ۴ (کار در کلاس ص ۱۱۵)																									
۴	۴	(هر ستون کامل ۰/۲۵) <table><tr><td>p</td><td>q</td><td>$q \vee p$</td><td>$p \wedge (q \vee p)$</td></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>د</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr></table> $\rightarrow p \wedge (q \vee p) \equiv p$ (تمرین ۶ ص ۱۵)						p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$	د	د	د	د	د	ن	د	د	ن	د	د	ن	ن	ن	ن	ن
p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$																								
د	د	د	د																								
د	ن	د	د																								
ن	د	د	ن																								
ن	ن	ن	ن																								
۵	۵	ارزش گزاره: نادرست (۰/۲۵) نقیض: $\forall y \in N ; \frac{y+3}{5} \neq 0$ (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۱۰ ص ۱۵)																									
۶	۶	 (۰/۵) (مشابه فعالیت ص ۳۲)																									
۷	۷	$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \emptyset = A$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (مثال ص ۲۳)																									

کلید سوالات امتحان شبیه نهایی درس: آمار و احتمال		رشته: ریاضی - فیزیک		ساعت شروع : ۱۳/۱۵		مدت امتحان : ۱۱۰ دقیقه	
		سال یازدهم متوسطه دوم		تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۲/۱۹		تعداد صفحه : ۳	
		دانش آموزان و داوطلبان آزاد در نوبت عصر سال تحصیلی: ۱۴۰۲-۱۴۰۳					
ردیف		صفحه دوم					
۸		اگر تعداد اعضای A برابر n باشد رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت: $2^{n-2}(2^2-1) = 384 \quad (۰/۲۵) \quad n=9 \quad (۰/۲۵)$ $2^n - 2^{n-2} = 384 \quad (۰/۲۵)$ $2^{n-2} = 128$ (مشابه تمرین ۲ ص ۳۳)					
۹		(الف) ناسازگارند (۰/۵) (کاردرکلاس صفحه ۴۲) (ب) $M_r = \{3, 6, 9, \dots, 198\} \rightarrow n(M_r) = 66 \rightarrow P(M_r) = \frac{66}{200} \quad (۰/۲۵)$ $M_f = \{4, 8, 12, \dots, 200\}$ $M_r \cap M_f = \{12, 24, \dots, 192\} \rightarrow n(M_r \cap M_f) = 16 \rightarrow P(M_r \cap M_f) = \frac{16}{200} \quad (۰/۲۵)$ $P(M_r - M_f) = P(M_r) - P(M_r \cap M_f) = \frac{66}{200} - \frac{16}{200} = \frac{1}{4} \quad (۰/۲۵)$ (مشابه تمرین ۵ ص ۴۳)					
۱۰		۱ $B - A = \{c, d\}$, $C' = S - C = \{c, d\} \quad (۰/۲۵)$ $(A \subseteq B) \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A) = \frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{11}{35} \quad (۰/۵)$ $P(C') = P(B - A) = \frac{11}{35} \quad (۰/۲۵)$ (تمرین ۳ ص ۴۷)					
۱۱		۱ A : پیشامد قبولی زهرا در درس فیزیک، B : پیشامد قبولی ریحانه در درس فیزیک، A و B مستقل هستند (۰/۲۵) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$ $= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad (۰/۲۵)$ $= 0/9 + 0/7 - 0/63 = 0/97 \quad (۰/۲۵)$ (مثال ۲ ص ۶۴)					
۱۲		۱ A : پیشامد این که لامپ انتخابی از جعبه جدید متعلق به جعبه اول بوده باشد B : پیشامد این که لامپ انتخابی از جعبه جدید متعلق به جعبه دوم بوده باشد C : پیشامد این که معیوب بودن لامپ انتخابی از جعبه جدید $P(C) = P(C A)P(A) + P(C B)P(B) = \frac{4}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{3}{12} \times \frac{5}{10} \quad (۰/۵) = \frac{13}{40} \quad (۰/۲۵)$ * در صورت بکارگیری روشی دیگر مثل استفاده از نمودار درختی، بارم به تناسب تقسیم گردد (تمرین ۹ ص ۶۲)					

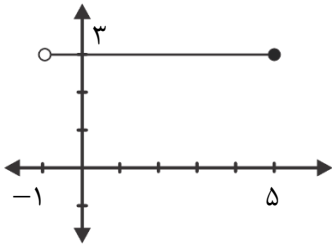
مدت امتحان : ۱۱۰ دقیقه	ساعت شروع : ۱۳/۱۵	رشته: ریاضی - فیزیک	کلید سوالات امتحان شبه نهایی درس: آمار و احتمال 
تعداد صفحه : ۳	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۲/۱۹	سال یازدهم متوسطه دوم	
اداره سنجش آموزش و پرورش استان فارس			دانش آموزان و داوطلبان آزاد در نوبت عصر سال تحصیلی: ۱۴۰۲-۱۴۰۳
بارم	صفحه سوم		ردیف
۰/۵	۱۳ (الف) فراوانی داده مجموع کل فراوانی‌ها = $\frac{\text{فراوانی داده}}{\text{مجموع کل فراوانی‌ها}}$ $۹ = ۳۰ \times \frac{۰}{۳} = \text{مجموع کل فراوانی‌ها} \times \text{فراوانی نسبی داده} = \text{فراوانی داده}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۵ ص ۷۸) (ب) ۳ (۰/۲۵) و ۸ (۰/۲۵) (۰/۵) (مشابه تمرین ۳ ص ۸۴)		
۱	۱۴ $\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{۳ \times ۱۵ + ۲ \times ۱۷ + ۲x + ۴ \times ۱۷}{۳ + ۲ + ۲ + ۴} = ۱۶ \quad (۰/۵)$ (۰/۲۵) $x = ۱۴/۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۱۴۷ + ۲x = ۱۷۶$ (۰/۲۵) (مشابه فعالیت ص ۸۰)		
۲	۱۵ برای نشان دادن هر مورد روی جعبه (۰/۲۵) و برای رسم شکل (۰/۲۵)  $Q_3 - Q_1 = ۹ - ۳ = ۶$ = دامنه میان چارکی (۰/۵) (مشابه تمرین ۷ صفحه ۹۴)		
۰/۷۵	۱۶ (الف) $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲}{۱۰۰}$ ضریب تغییرات $\sigma = ۲$ انحراف معیار (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (رابطه ضریب تغییرات ص ۹۰) (ب) کارخانه A (۰/۲۵) (۰/۲۵) (کاردرکلاس ص ۹۱)		
۰/۵	۱۷ (الف) نوعی روش نمونه‌گیری است که در آن همه‌ی واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند (۰/۵) (تعریف ص ۹۹) (ب) A: مشاهده B: مصاحبه (۰/۵) (روش‌های گردآوری ص ۱۰۷) (ج) آمار استنباطی (۰/۵) (تعریف ص ۱۰۹)		
۰/۵	۱۸ (الف) $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۲}{۵}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (کاردرکلاس ص ۱۱۵) (ب) $\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow ۴ - \frac{۲ \times ۲}{\sqrt{۱۰۰}} \leq \mu \leq ۴ + \frac{۲ \times ۲}{\sqrt{۱۰۰}} \rightarrow ۳/۶ \leq \mu \leq ۴/۴$ (۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵) (فرمول بازه اطمینان ص ۱۱۶)		
۲۰	همکاران محترم لطفاً برای راه‌حل‌های درست و منطقی دیگر، بارم را متناسب تقسیم بفرمایید		جمع

باسمه تعالی

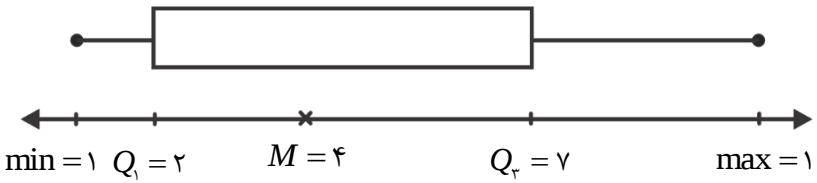
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: آمار و احتمال	رشته : ریاضی - فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	سال یازدهم متوسطه دوم	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۲/۱۹	تعداد صفحه : ۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد در نوبت صبح	سال تحصیلی: ۱۴۰۳-۱۴۰۲	اداره سنجش آموزش و پرورش استان فارس	
ردیف	سؤالات صفحه ۱		
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل $2^n + 1$ برای هر عدد طبیعی اول است. ب) اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه مستقل نیز خواهند بود. پ) ضریب تغییرات وابسته به واحد اندازه گیری نیست. ت) مقدار عددی حاصل از جایگذاری اعداد نمونه تصادفی در آماره نظیر یک پارامتر جامعه، بر آورد نقطه‌ای آن پارامتر نام دارد.		
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) ارزش گزاره‌ی $p \rightarrow q$ هنگامی که گزاره p نادرست باشد همواره است. ب) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند که $A \cap B = \emptyset$، آنگاه A و B را دو پیشامد می‌نامند. پ) برای متغیرهای پیوسته از نمودار استفاده می‌شود. (بافت نگاشت - دایره ای) ت) فرآیند نتیجه‌گیری درباره‌ی پارامترهای جامعه بر اساس نمونه، نام دارد.		
۳	در سؤالات زیر گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) کدام مجموعه‌ی زیر با دیگر مجموعه‌ها متفاوت است؟ (۱) $\{x \in Q x^2 - 3x + 2 = 0\}$ (۲) $\{x \in Z 1 \leq x \leq 2/5\}$ (۳) $\{x \in Q 2x^2 + 3x + 1 = 0\}$ (۴) $\{x \in N 1 \leq x \leq 2 \vee x < -1\}$ ب) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است، دو مهره به صورت پی در پی و بدون جایگذاری، بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهره اول و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد، احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند چقدر است؟ (۱) $\frac{12}{39}$ (۲) $\frac{10}{39}$ (۳) $\frac{8}{39}$ (۴) $\frac{3}{13}$ پ) میانگین پنج داده‌ی آماری ۲۰ است، اگر دو عدد ۱۲ و ۱۴ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چقدر است؟ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰ ت) بهترین روش برای جمع آوری داده برای تحقیق در مورد نمرات دروس ریاضی استان‌ها، کدام است؟ (۱) مشاهده (۲) دادگان (۳) مصاحبه (۴) پرسش‌نامه		
۴	با استفاده از جدول ارزش‌ها، هم‌ارزی زیر را نشان دهید. $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$		
۵	ارزش گزاره‌ی سوری زیر را تعیین کنید سپس نقیض آن را بنویسید. $\exists y \in R ; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$		
۶	ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 فرد باشد، آنگاه n نیز فرد است.		

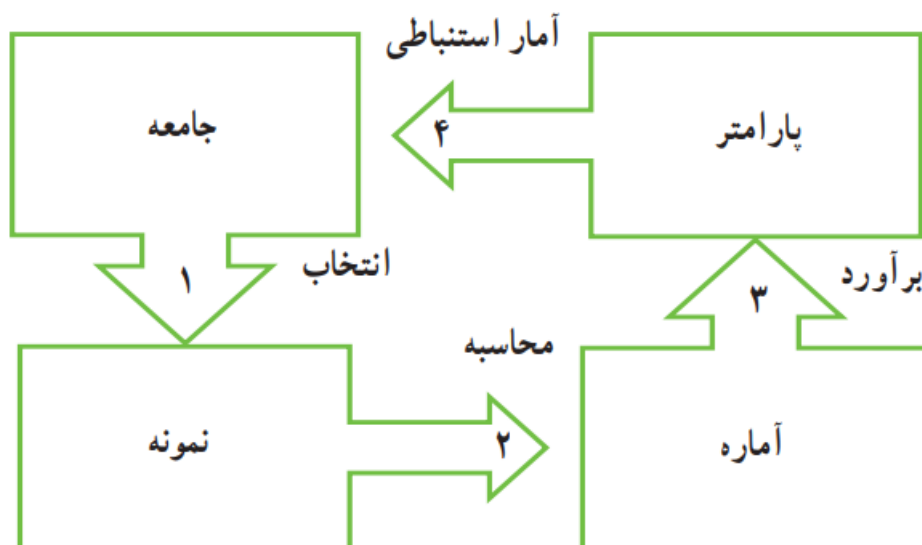
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: آمار و احتمال		رشته: ریاضی - فیزیک		ساعت شروع : ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه	
نام و نام خانوادگی :		سال یازدهم متوسطه دوم		تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۲/۱۹		تعداد صفحه : ۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد در نوبت صبح		سال تحصیلی: ۱۴۰۲-۱۴۰۳		اداره سنجش آموزش و پرورش استان فارس			
ردیف	صفحه دوم						نمره
۷	الف) درستی تساوی مجموعه‌ای زیر را نشان دهید . $A - B = B' - A'$ ب) اگر $A = \{3\}$ و $B = (-1, 5]$ باشد، آنگاه نمودار مجموعه‌ی $B \times A$ را رسم کنید.						۰/۵ ۰/۲۵
۸	الف) ثابت کنید که برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ ب) عددی به تصادف از اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که عدد انتخابی بر ۲ یا ۵ بخش‌پذیر باشد را حساب کنید.						۰/۷۵ ۱/۲۵
۹	یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج چهار برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک پرتاب تاس احتمال این که عددی بزرگ‌تر از ۴ ظاهر شود را حساب کنید.						۱
۱۰	دو ظرف داریم در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به تصادف برمی‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم، اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟						۱
۱۱	اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری‌که $P(A \cap B) = ۰/۱$ و $P(A \cap B') = ۰/۴$ باشد، احتمال رخ دادن پیشامد B را حساب کنید.						۰/۵
۱۲	الف) اگر در یک نمونه آماری از گروه‌های خونی، فراوانی نسبی گروه خونی O برابر با $۰/۲$ باشد و مجموع فراوانی‌های همه‌ی گروه‌ها برابر با ۴۰ باشد، فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟ ب) میانه و مد داده‌های زیر را بدست آورید. ۵، ۱۲، ۹، ۶، ۴، ۱۲						۰/۵ ۰/۵
۱۳	نمودار جعبه‌ای ۱۵ داده‌ی آماری زیر را رسم کنید و دامنه‌ی میان‌چارکی را محاسبه کنید. ۷، ۴، ۳، ۸، ۶، ۴، ۱، ۱، ۱۰، ۲، ۷، ۲، ۲، ۲، ۵						۲
۱۴	واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات را برای داده‌های زیر محاسبه کنید. ۱۰، ۸، ۷، ۶، ۴						۲
۱۵	الف) نمونه‌گیری سیستماتیک یا سامانمند را تعریف کنید. ب) فرق بین آماره با پارامتر چیست؟ پ) در یک مطالعه از تعدادی مشتری غذاهای گیاهی سوال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند. متغیر این مطالعه را مشخص کنید و معین کنید که این متغیر کمی است یا کیفی؟						۰/۵ ۰/۵ ۰/۵
۱۶	الف) اگر در فرمول بازه‌ی اطمینان برای میانگین جامعه، انحراف معیار جامعه افزایش یابد. طول فاصله‌ی اطمینان چه تغییری می‌کند؟ ب) نمونه‌ای تصادفی با اندازه‌ی ۳۶ و میانگین ۱۵ از جامعه‌ای با انحراف معیار $۱/۸$ انتخاب کرده‌ایم. بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد را برای میانگین جامعه محاسبه کنید.						۰/۵ ۱
جمع	موفق و سربلند باشید						۲۰

باسمه تعالی

کلید سوالات امتحان شبه نهایی درس: آمار و احتمال		رشته: ریاضی - فیزیک		ساعت شروع : ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه																															
		سال یازدهم متوسطه دوم		تاریخ امتحان ۱۴۰۳/۰۲/۱۹		تعداد صفحه : ۳																															
		دانش آموزان و داوطلبان آزاد درنوبت صبح سال تحصیلی: ۱۴۰۳-۱۴۰۲		اداره سنجش آموزش و پرورش استان فارس																																	
ردیف	صفحه ۱						نمره																														
۱	هر مورد (۰/۲۵) الف) نادرست (تمرین ۱۰ ص ۱۵) ب) نادرست (تمرین ۱ ص ۶۷) پ) درست (کاردرکلاس ص ۹۱) ت) درست (تعریف ص ۱۱۲)						۱																														
۲	هر مورد (۰/۲۵) الف) درست (ترکیب شرطی صفحه ۸) ب) ناسازگار (اصول احتمال ص ۴۱) پ) بافت نگاشت (تمرین ۳ ص ۷۷) ت) آمار استنباطی (تمرین ص ۱۰۹)						۱																														
۳	هر مورد (۰/۵) الف) گزینه ۳ (مشابه کاردرکلاس ص ۱۹) ب) گزینه ۲ (مثال ۳ ص ۶۵) پ) گزینه ۳ (مشابه تمرین ۹ ص ۸۵) ت) گزینه ۲ (روش های گردآوری داده ها ص ۱۰۷)						۲																														
۴	(هر ستون کامل ۰/۲۵) <table><tr><td>p</td><td>q</td><td>$\sim q$</td><td>$p \rightarrow q$</td><td>$\sim (p \rightarrow q)$</td><td>$p \wedge \sim q$</td></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>د</td><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr></table> $\rightarrow \sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ (تمرین ۶ ص ۱۵)						p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim (p \rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$	د	د	ن	د	ن	ن	د	ن	د	ن	د	د	ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن	د	د	ن	ن	۱/۵
p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim (p \rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$																																
د	د	ن	د	ن	ن																																
د	ن	د	ن	د	د																																
ن	د	ن	د	ن	ن																																
ن	ن	د	د	ن	ن																																
۵	ارزش گزاره: درست (۰/۲۵) نقیض : $\forall y \in R ; y \geq ۰ \vee y^2 > ۱$ (۰/۲۵) (مثال ص ۱۳)						۰/۵																														
۶	به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم (۰/۲۵) فرض کنیم a زوج باشد یعنی برای یک عدد k صحیح ، $a = 2k$ و خواهیم داشت $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k' \in Z}) = 2k'^2$ (۰/۵) در نتیجه a^2 عددی زوج است (مثال ص ۹)						۰/۷۵																														
۷	الف) $A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A'$ (۰/۲۵) ب) (۰/۲۵)  (مشابه تمرین ۱۴ ص ۳۴)						۰/۵ ۰/۲۵																														

کلید سوالات امتحان شبه نهایی درس: آمار و احتمال		رشته: ریاضی - فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه
		سال یازدهم متوسطه دوم	تاریخ امتحان ۱۴۰۳/۰۲/۱۹	تعداد صفحه: ۳
		دانش آموزان و داوطلبان آزاد در نوبت صبح سال تحصیلی: ۱۴۰۳-۱۴۰۲		
اداره سنجش آموزش و پرورش استان فارس				
ردیف	صفحه دوم			
۸	الف) چون $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ و $A = (0/25)$ و پیشامدهای $A - B$ و $A \cap B$ ناسازگارند $(0/25)$ پس: $(0/25) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ $(0/25) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ (قضیه ص ۴۱ بند ۴) ب) ابتدا تعداد مضارب ۲ و ۵ و تعداد مضارب مشترک آن‌ها را از اعداد ۱ تا ۱۰۰ حساب می‌کنیم $M_2 = \{2, 4, 6, \dots, 100\} \rightarrow n(M_2) = 50 \rightarrow P(M_2) = \frac{1}{2} \quad (0/25)$ $M_5 = \{5, 10, 15, \dots, 100\} \rightarrow n(M_5) = 20 \rightarrow P(M_5) = \frac{1}{5} \quad (0/25)$ $M_2 \cap M_5 = \{10, 20, \dots, 100\} \rightarrow n(M_2 \cap M_5) = 10 \rightarrow P(M_2 \cap M_5) = \frac{1}{10} \quad (0/25)$ $P(M_2 \cup M_5) = P(M_2) + P(M_5) - P(M_2 \cap M_5) = \frac{6}{10} \quad (0/25)$ (مشابه تمرین ۵ ص ۴۳)			
۹	$x = P(\text{هر عدد فرد})$ و $4x = P(\text{هر عدد زوج}) \quad (0/25)$ $P(S) = 1 \rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \quad (0/25)$ $\Rightarrow 15x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{15} \quad (0/25)$ $P(\{5, 6\}) = 5x = \frac{1}{3} \quad (0/25)$ (مشابه کاردرکلاس ص ۴۶)			
۱۰	A: پیشامد این‌که مهره برداشته شده از ظرف اول سبز باشد B: پیشامد این‌که مهره برداشته شده از ظرف اول قرمز باشد G: پیشامد این‌که مهره برداشته شده از ظرف دوم سبز باشد $P(G) = P(G A)P(A) + P(G B)P(B)$ $= \frac{4}{9} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{25}{63}$ $(0/5) \quad (0/25)$ * در صورت بکارگیری روشی دیگر مثل استفاده از نمودار درختی، بارم به تناسب تقسیم گردد (تمرین ۷ ص ۶۱)			
۱۱	$0/5 \quad B$ و $A \Rightarrow p(A \cap B) = P(A)P(B) = 0/1$ مستقل هستند $\rightarrow P(B') = 4P(B) \quad (0/25)$ B' و $A \Rightarrow P(A \cap B') = P(A)P(B') = 0/4$ همچنین مستقل هستند و از این‌که $P(B) + P(B') = 1$ خواهیم داشت: $P(B) = 0/2 \quad (0/25)$ (مشابه تمرین ۱۲ ص ۶۸)			

مدت امتحان : ۱۱۰ دقیقه	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی - فیزیک	کلید سوالات امتحان شبیه نهایی درس: آمار و احتمال 
تعداد صفحه : ۳	تاریخ امتحان ۱۴۰۳/۰۲/۱۹	سال یازدهم متوسطه دوم	
اداره سنجش آموزش و پرورش استان فارس			دانش آموزان و داوطلبان آزاد در نوبت صبح سال تحصیلی: ۱۴۰۳-۱۴۰۲
بارم	صفحه سوم		ردیف
۰/۵ ۰/۵	الف) $\frac{\text{فراوانی گروه خونی } O}{\text{تعداد کل}} = \frac{O}{\text{فراوانی نسبی گروه خونی } O} \rightarrow \text{فراوانی گروه خونی } O = 0.2 \times 40 = 8 \quad (0.25)$ (مشابه تمرین ۵ ص ۷۸) ب) میانه: ۷/۵ (0.25) مد: ۱۲ (0.25) (مشابه تمرین ۳ ص ۸۴)		۱۲
۲	مشخص کردن هر مورد روی جعبه (0.25) و رسم جعبه (0.25)  $Q_3 - Q_1 = 5$ دامنه میان چارکی (0.5) (مشابه تمرین ۷ ص ۹۴)		۱۳
۲	$\bar{x} = 7 \quad \sigma^2 = 4 \quad \sigma = 2 \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{7}$ $(0.5) \quad (0.5) \quad (0.5) \quad (0.5)$ (مشابه تمرین ۱ ص ۹۳)		۱۴
۰/۵ ۰/۵ ۰/۵	الف) نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه‌ی طبقات با هم برابر است. فقط از طبقه‌ی اول، واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر این کار انجام می‌گیرد (0.5) ب) پارامتر مشخصه‌ای عددی است که جنبه‌ای خاص در جامعه را شرح می‌دهد اما آماره مشخصه‌ای عددی است که به‌عنوان برآورد پارامتر استفاده می‌شود و از داده‌های یک نمونه بدست می‌آید. (0.5) پ) متغیر: وعده غذایی (0.25) نوع متغیر: کیفی (0.25) (تمرین ۸ ص ۱۱۰) (تمرین ۱۰ ص ۱۱۰)		۱۵
۰/۵ ۱	الف) افزایش می‌یابد (0.5) ب) $\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad (0.25)$ $\Rightarrow 15 - \frac{2 \times 1/\sqrt{36}}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 15 + \frac{2 \times 1/\sqrt{36}}{\sqrt{36}} \rightarrow 14/4 \leq \mu \leq 15/6$ $(0.5) \quad (0.25)$ (مشابه قسمت ب تمرین ۵ ص ۱۱۹)		۱۶
۲۰	همکاران محترم لطفاً برای راه‌حل‌های درست و منطقی دیگر، بارم را متناسب تقسیم بفرمایید		جمع



برآورد

اوج علم آمار استفاده از علم احتمال برای
لبداع آمار استنباطی بوده است. آمار
استنباطی استخراج نتایجی براساس بخش
کوچکی از داده‌ها در یک مسئله است که
می‌توان آن را به همه داده‌های آن مسئله
تعمیم داد. با وجود آنکه پایه‌های احتمال
بر نظریه‌های ریاضی استوار شده است،
ولی آمار را نمی‌توان به عنوان شاخه‌ای از
ریاضی در نظر گرفت.

گردآوری از : مریم میرزازعمانی

در درس قبل گفتیم، مشخصه عددی که توصیف کننده جنبه خاصی از **نمونه** باشد را **آماره** می‌گوییم. در این درس با استفاده از این آماره‌ها پارامتر جامعه را برآورد می‌کنیم. (پارامتر جامعه را تخمین می‌زنیم.)

برآورد پارامتر جامعه به دو روش انجام می‌شود:

① برآورد نقطه‌ای پارامتر

② برآورد بازه‌ای پارامتر

➔ **برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه:** همان مقدار عددی حاصل از جای‌گذاری اعداد نمونه در آماره نظیر آن پارامتر است.

◇ برآورد نقطه‌ای همان آماره است.

➤ **مثال:** فرض کنیم در یک باشگاه ورزشی ۱۱۷ عضو بزرگسال فعالند. می‌خواهیم میانگین قد این اعضا را برآورد کنیم. در حال حاضر فقط ۷ نفر از آن‌ها در سالن حاضرند که قد آن‌ها اندازه‌های روبرو است:

۱۸۳، ۲۰۲، ۱۸۲، ۱۷۵، ۱۸۵، ۱۹۳، ۱۸۹

پارامتر جامعه را برآورد کنید.

پاسخ: پارامتر جامعه: میانگین آماره نظیر پارامتر: میانگین نمونه داده شده

$$\bar{x} = \frac{183 + 202 + 182 + 175 + 185 + 193 + 189}{7} = 187$$

بنابراین برآورد نقطه‌ای میانگین جامعه ۱۸۷ است. ■

➤ **مثال:** فرض کنید انحراف معیار مساحت ۲۰۰ مربع مختلف مورد نظر باشد. در حال حاضر چهار مربع به اضلاع ۳، ۳، ۵، ۵ در اختیار داریم. برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه را با استفاده از این نمونه به دست آورید.

پاسخ: پارامتر جامعه: انحراف معیار مساحت‌ها آماره نظیر پارامتر: انحراف معیار مساحت نمونه داده شده

ابتدا مساحت مربع‌های نمونه را برست می‌آوریم: ۹، ۹، ۲۵، ۲۵

حال انحراف معیار این اعداد را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{9 + 9 + 25 + 25}{4} = 17$$

$$\sigma^2 = \frac{(9 - 17)^2 + (9 - 17)^2 + (25 - 17)^2 + (25 - 17)^2}{4} = 64 \rightarrow \sigma = 8$$

بنابراین بر اساس این نمونه، برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه ۸ است. ■

◀ **مثال:** از بین اعداد ۰ تا N ، ده عدد زیر انتخاب شده‌اند. با دو روش مختلف N را برآورد کنید.

۵	۸	۹	۱۱	۱۲	۳	۷	۵	۲	۹
---	---	---	----	----	---	---	---	---	---

پاسخ: روش اول: برآورد نقطه‌ای (استفاده از میانگین):

$$\begin{aligned} \text{میانگین (پارامتر جامعه)} &= \frac{\overbrace{1+2+\dots+N}^{\text{مجموع اعضای جامعه}}}{\underbrace{N+1}_{\text{تعداد اعضای جامعه}}} = \frac{N(1+N)}{N+1} = \frac{N}{2} \\ \Rightarrow \frac{N}{2} &= 7.1 \rightarrow N = 14.2 \approx 14 \end{aligned}$$

$$\text{میانگین نمونه (آماره)} = \frac{5+8+9+11+12+3+7+5+2+9}{10} = 7.1$$

روش دوم: استفاده از میانه:

میانه جامعه بالا تقریباً با میانگین یکسان است. پس پارامتر جامعه را همان $\frac{N}{2}$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} 2, 3, 5, 5, \underbrace{7, 8}_{\frac{7+8}{2}=7.5}, 9, 9, 11, 12 \quad \Rightarrow \frac{N}{2} &= 7.5 \rightarrow N = 15 \end{aligned}$$

◀ **برآورد نقطه‌ای با توجه به اندازه نمونه**

گفتیم در آمار استنباطی کار ما این است که از روی نمونه آماری و آماره نمونه، پارامتر جامعه را برآورد کنیم.

اکنون بررسی می‌کنیم که:

① با توجه به اندازه نمونه، تعداد برآوردها چند تاست.

② با افزایش اندازه نمونه، آماره چقدر به پارامتر نزدیک می‌شود.

◀ **مثال:** فرض کنیم درآمد افراد یک جامعه ده عضوی به صورت زیر است.

۸	۱۱	۵	۴	۱۵	۶	۵	۹	۲۰	۷
---	----	---	---	----	---	---	---	----	---

در این جا چون همه اعضا جامعه را داریم می‌توانیم میانگین جامعه (پارامتر جامعه) را محاسبه کنیم.

$$\bar{x} = \frac{8+11+5+4+15+6+5+9+20+7}{10} = 9$$

حالا بررسی می‌کنیم با نمونه‌های مختلف چطور می‌توان پارامتر جامعه را برآورد کرد.

الف) اگر نمونه یک عضوی باشد.

در این صورت $n=1$ نمونه به صورت روبرو داریم: $\{8\}, \{11\}, \{5\}, \{4\}, \{15\}, \{6\}, \{5\}, \{9\}, \{20\}, \{7\}$

در هر مورد میانگین (برآورد نقطه‌ای) خود عدد است و تنها نمونه $\{9\}$ میانگین را به درستی برآورد می‌کند.

ب) اگر نمونه دو عضوی باشد.

در این صورت $\binom{10}{2} = 45$ نمونه داریم. نمونه دو عضوی می تواند میانگین را به درستی برآورد کند که میانگین دو عضو آن ۹ باشد. به عبارت دیگر مجموع اعضای نمونه $2 \times 9 = 18$ باشد. (نمونه $\{a, b\}$ و $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$)
در این مثال تنها نمونه $\{7, 11\}$ میانگین را دقیق برآورد می کند.

ج) اگر نمونه سه عضوی باشد.

در این صورت $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = 120$ نمونه داریم. نمونه دو عضوی می تواند میانگین را به درستی برآورد کند که میانگین سه عضو آن ۹ باشد. به عبارت دیگر مجموع اعضای نمونه $3 \times 9 = 27$ باشد. (نمونه $\{a, b, c\}$ و $\bar{x} = \frac{a+b+c}{3}$)
به عنوان مثال نمونه‌ی $\{9, 7, 11\}$ میانگین را دقیق برآورد می کند. ■

◇ هر چقدر اعضای نمونه بیشتر باشد، برآورد ما دقیق تر است.

مثال: در یک جامعه ۶ عضوی با اعداد ۲, ۴, ۵, ۷, ۷, ۷ می خواهیم میانگین را برآورد کنیم.

الف) پارامتر جامعه چیست؟

ب) احتمال آنکه با یک نمونه ۲ عضوی بتوان پارامتر جامعه را دقیق برآورد کرد چقدر است؟

ج) اگر یک نمونه ۵ عضوی انتخاب کنیم چند برآورد متفاوت داریم؟

پاسخ: الف) پارامتر جامعه همان میانگین جامعه است. در اینجا چون همه اعضای جامعه را داریم می توانیم پارامتر جامعه را دقیقاً مناسبه کنیم.

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 5 + 5 + 7 + 7}{6} = 5$$

ب) نمونه دو عضوی مورد نظر است که میانگین آن ۵ باشد و به عبارتی مجموع اعضای حاضر در نمونه $2 \times 5 = 10$ باشد. که تنها نمونه $\{5, 5\}$ این چنین است. تعداد کل نمونه‌های دو عضوی: $\binom{6}{2} = 15$ تعداد نمونه‌های مناسب:

$$P = \frac{1}{15}$$

ج) در زیر همه نمونه‌های ۵ عضوی را می نویسیم. (در هر مورد یک عضو جامعه حذف شده است).

$\{2, 4, 5, 5, 7, 7\}$	$\{2, 4, 5, 5, 7, 7\}$	$\{2, 4, 5, 5, 7, 7\}$	$\{2, 4, 5, 5, 7, 7\}$	$\{2, 4, 5, 5, 7, 7\}$	$\{2, 4, 5, 5, 7, 7\}$
$\bar{x} = \frac{28}{6} = 4\frac{2}{3}$	$\bar{x} = \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$	$\bar{x} = \frac{25}{5} = 5$	$\bar{x} = \frac{25}{5} = 5$	$\bar{x} = \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$	$\bar{x} = \frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$

کلاً ۳ مقدار متفاوت $4\frac{2}{3}$ ، 5 و $5\frac{1}{5}$ برآورد می شود. ■

← نمودار برآورد میانگین-احتمال

همانطور که دیدید با داشتن نمونه می توان پارامتر جامعه را برآورد کرد. این برآورد گاهی دقیق و گاهی بسیار تفاوت دارد. می توان با استفاده از نمودار میله ای، برای نمونه هایی به اندازه های مختلف احتمال رخ دادن همه حالت ها و تفاوت آن ها با پارامتر جامعه در کنار هم دید.

برای رسم این نمودار بر روی محور طول ها مقادیر برآورد میانگین نمونه و بر روی محور عرض ها احتمال تخمین هر برآورد را نشان می دهیم.

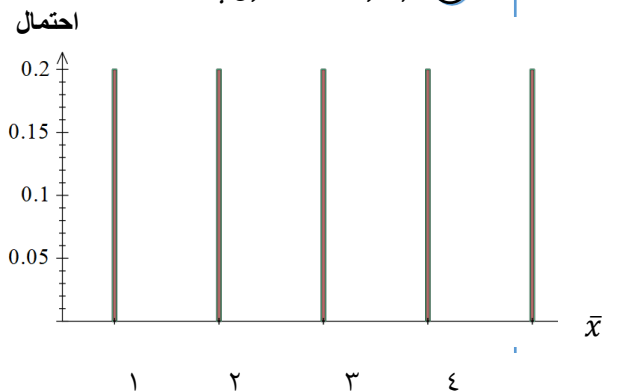
◀ **مثال:** فرض کنیم داده های جامعه ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ باشد. می خواهیم میانگین جامعه را برآورد کنیم.

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

در اینجا می توانیم پارامتر جامعه را محاسبه کنیم:

① اگر نمونه ها تک عضوی باشند:

نمونه	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
برآورد نقطه ای	$\bar{x} = 1$	$\bar{x} = 2$	$\bar{x} = 3$	$\bar{x} = 4$	$\bar{x} = 5$
احتمال برآورد	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

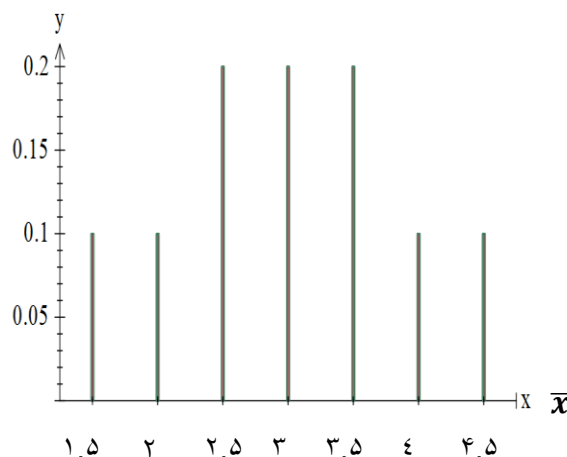


② اگر نمونه ها ۲ عضوی باشند: (تعداد کل نمونه ها: ۱۰) و جمع احتمال ها = ۱

نمونه	{1, 2}	{1, 3}	{1, 4}	{1, 5}	{2, 3}	{2, 4}	{2, 5}	{3, 4}	{3, 5}	{4, 5}
برآورد نقطه ای	$\bar{x} = 1.5$	$\bar{x} = 2$	$\bar{x} = 2.5$	$\bar{x} = 3$	$\bar{x} = 2.5$	$\bar{x} = 3$	$\bar{x} = 3.5$	$\bar{x} = 4$	$\bar{x} = 3.5$	$\bar{x} = 4.5$
احتمال برآورد	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

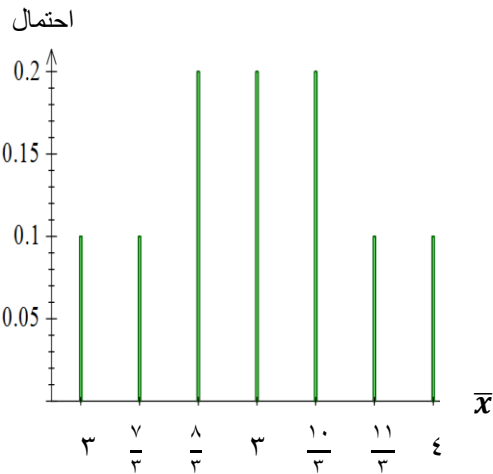
← محور افقی

← محور عمودی



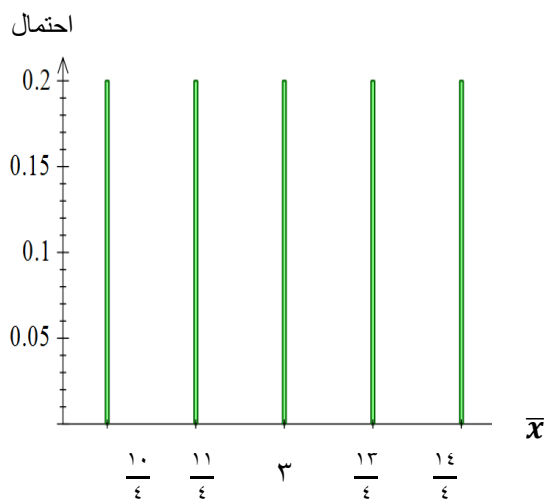
③ اگر نمونه‌ها ۳ عضوی باشند:

نمونه	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 5\}$ $\{1, 3, 4\}$	$\{1, 3, 5\}$ $\{2, 3, 4\}$	$\{1, 4, 5\}$ $\{2, 3, 5\}$	$\{2, 4, 5\}$	$\{3, 4, 5\}$
برآورد نقطه‌ای	$\bar{x} = 3$	$\bar{x} = \frac{7}{3}$	$\bar{x} = \frac{1}{3}$	$\bar{x} = 3$	$\bar{x} = \frac{10}{3}$	$\bar{x} = \frac{11}{3}$	$\bar{x} = 4$
احتمال برآورد	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

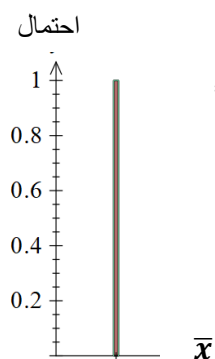


④ اگر نمونه‌ها ۴ عضوی باشند:

نمونه	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$
برآورد نقطه‌ای	$\bar{x} = \frac{10}{4}$	$\bar{x} = \frac{11}{4}$	$\bar{x} = \frac{13}{4}$	$\bar{x} = \frac{13}{4}$	$\bar{x} = \frac{14}{4}$
احتمال برآورد	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$



نمونه	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
برآورد نقطه‌ای	$\bar{x} = 3$
احتمال برآورد	1



⑤ اگر نمونه‌ها ۵ عضوی باشند:

همان طور که ملاحظه می کنید:

① هر چه اندازه نمونه بزرگتر می شود، برآوردهای حاصل به پارامتر جامعه نزدیکتر می شود.

② میله های وسطی پارامتر جامعه را دقیق تر برآورد می کنند.

مثال: درآمد یک جامعه ۶ نفره بر حسب میلیون به صورت ۹, ۱, ۶, ۰, ۱۰, ۴ است. نمونه ای سه عضوی انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این نمونه میانگین درآمد افراد جامعه را $\frac{20}{3}$ میلیون برآورد کند را بدست آورید.

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{20}{3} \rightarrow \text{مجموع اعضا نمونه} = 20 \rightarrow \{9, 1, 10\}, \{1, 9, 10\}$$

$$P = \frac{2}{20} \blacksquare \rightarrow P = \frac{2}{20} \blacksquare \quad \text{کل نمونه های } 3 \text{ عضوی} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

انحراف معیار برآورد میانگین: همانطور که در مثال های قبل دیدیم هر چقدر اعضای نمونه بیشتر باشند، برآورد حاصل از نمونه های مختلف به پارامتر جامعه نزدیکتر است و در نتیجه پراکندگی آماره های مختلفی که محاسبه می شود کمتر است. یکی از دقیق ترین معیارهای پراکندگی که تا کنون آموخته اید، انحراف معیار است که هر چقدر کمتر باشد، بهتر است.

پس هر قدر انحراف معیار برآوردی کمتر باشد، آن برآورد بهتر است.

برای محاسبه انحراف معیار برآورد میانگین آمارشناسان روش روبرو را پیشنهاد می کنند: (برای سادگی در این رابطه تعداد اعضای جامعه نامتناهی فرض شده است.)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

σ : انحراف معیار جامعه

n : تعداد اعضای نمونه

مثال: فرض کنیم از مطالعات سال های قبل بدانیم انحراف معیار درآمد هر فرد در کشور ۴ میلیون تومان است. (یعنی انحراف معیار جامعه را داریم!)

انحراف معیار برآورد میانگین را در دو حالت زیر بیابید.

ب) وقتی نمونه ۱۰۰ تایی داریم.

الف) وقتی نمونه ۲۵ تایی داریم.

پاسخ:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{الف)}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{100}} = \frac{4}{10} = 0.4 \quad \text{ب)} \blacksquare$$

مثال: در یک جامعه انحراف معیار برابر ۶۰ و انحراف معیار برآورد میانگین برابر ۱۲ است. اگر اندازه نمونه ۴ برابر شود، برآورد میانگین نمونه جدید چند است؟

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 12 = \frac{60}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 5 \rightarrow n = 25$$

$$\blacksquare \xrightarrow{n \rightarrow 4n} n = 100, \sigma_{\bar{x}} = \frac{60}{\sqrt{100}} = \frac{60}{10} = 6$$

پاسخ:

◀ **مثال:** در یک جامعه انحراف معیار برآورد میانگین یک نمونه ۱۰۰ نفره، چند برابر انحراف معیار برآورد میانگین نمونه ۱۰۰۰۰ نفری است؟

پاسخ:
$$\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{10000}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{100}}} = \frac{\frac{\sigma}{100}}{\frac{\sigma}{10}} = \frac{1}{10}$$

◀ **مثال:** اگر اندازه نمونه‌ای ۱۰ برابر شود انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می‌شود؟

پاسخ:
$$\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{10n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n} \sigma}{\sqrt{10n} \sigma} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

◊ اگر اندازه نمونه را k برابر کنیم، انحراف معیار برآورد میانگین، $\frac{1}{\sqrt{k}}$ برابر می‌شود.

برآورد بازه‌ای: اگر از شما بعد از یک آزمون دشوار بخواهند نمره خود را تخمین بزنید (برآورد کنید)، بعید است که پاسخ شما یک نمره مثلاً ۱۵ باشد. احتمالاً می‌گویید به احتمال ۹۰ درصد نمره من بین ۱۴ تا ۱۷ است. هر چه فاصله بین دو نمره کمتر باشد برآورد شما دقیق‌تر است.

برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان پارامتر جامعه، بازه‌ای عددی برای پارامتر است، همراه با درصد مشخصی از اطمینان که به آن

ضریب اطمینان می‌گویند.

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{یا} \quad \mu \in \left[\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

μ : میانگین جامعه (پارامتر جامعه) σ : انحراف معیار جامعه

$\bar{x}$: میانگین نمونه (آماره یا برآورد نقطه‌ای) n : اندازه نمونه

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه:

اگر نمونه‌ای به اندازه‌ی n داشته باشیم، با اطمینان بیشتر از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

◀ **مثال:** فرض کنید در یک کلاس ۲۵ نفره میانگین درصد ریاضی در یک آزمون تستی برابر با ۳۳/۲ درصد و بر اساس آزمون‌های

قبل می‌دانیم انحراف معیار جامعه ۸ درصد است. در این صورت:

(الف) یک بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین درصدهای ریاضی پیدا کنید.

(ب) اگر این میانگین مربوط به ۱۰۰ دانش‌آموز باشد، طول بازه چه تغییری می‌کند؟

پاسخ: (الف) می‌دانیم $\sigma = 8, \bar{x} = 33.2, n = 25$

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 33.2 - \frac{2 \times 8}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 33.2 + \frac{2 \times 8}{\sqrt{25}} \rightarrow 30 \leq \mu \leq 36.4$$

(ب) اگر $n = 100$

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 33.2 - \frac{2 \times 8}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 33.2 + \frac{2 \times 8}{\sqrt{100}} \rightarrow 31.6 \leq \mu \leq 34.8$$

طول بازه اطمینان در حالت (الف) برابر: $36.4 - 30 = 6.4$ و طول بازه اطمینان در حالت (ب) برابر

$34.8 - 31.6 = 3.2$ در این صورت طول بازه اطمینان به اندازه ۳.۲ واحد کم شده است. ■

بازه $\left[\bar{x} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}} \text{ و } \bar{x} + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ یک بازه ۹۵٪ اطمینان برای یک نمونه n تایی با میانگین $\bar{x}$ از یک جامعه با انحراف معیار σ است. در اینصورت نکات زیر قابل توجه است:

◇ طول فاصله اطمینان (ابتدای بازه - انتهای بازه): $\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}}$

◇ نمایش بازه به صورت نامساوی قدر مطلق: $|\mu - \bar{x}| \leq \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}}$

◇ مرکز بازه اطمینان $\bar{x}$: $\left(\frac{\text{ابتدا} + \text{انتهای}}{۲} \right)$

◀ **مثال:** به سوالات زیر درباره بازه اطمینان پاسخ دهید:

الف) اگر اندازه نمونه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان می‌یابد؟ چرا؟

ب) اگر انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان می‌یابد؟ چرا؟

پاسخ: الف) کاهش. دقت کنید که طول بازه اطمینان برابر با $\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}}$ است. افزایش n موجب افزایش مخرج، در نتیجه کاهش کسر می‌شود.

ب) افزایش. با توجه مجدد به فرمول طول بازه اطمینان $\left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ واضح است که افزایش انحراف معیار جامعه (σ) موجب افزایش صورت کسر و در نتیجه افزایش طول بازه است.

◀ **مثال:** پنج نفر از کارمندان یک اداره را به عنوان نمونه انتخاب کرده‌ایم. اگر میزان درآمد سالیانه‌ی این افراد ۱۲ و ۱۸ و ۲۲ و ۲۸ و ۲۰ و ۲۰ میلیون تومان باشد و واریانس درآمد کارمندان اداره طبق آمارهای قبلی برابر $\frac{۵}{۴}$ باشد. با اطمینان بیش از ۹۵ درصد، بازه‌ای برای میانگین درآمد کارمندان اداره بنویسید.

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{۱۲ + ۱۸ + ۲۲ + ۲۸ + ۲۰}{۵} = ۲۰, \quad \sigma^2 = \frac{۵}{۴} \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{۵}}{۲}, \quad n = ۵$$

$$\bar{x} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow ۲۰ - \frac{۲ \times \frac{\sqrt{۵}}{۲}}{\sqrt{۵}} \leq \mu \leq ۲۰ + \frac{۲ \times \frac{\sqrt{۵}}{۲}}{\sqrt{۵}} \rightarrow ۱۹ \leq \mu \leq ۲۱$$

◀ **خط فقر** حداقل درآمدی است که برای زندگی در یک ماه به ازای هر نفر مورد نیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین درآمد افراد یک جامعه.

برای داشتن یک برآورد بازه‌ای از خط فقر از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \boxed{\frac{\bar{x}}{۲} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{\mu}{۲} \leq \frac{\bar{x}}{۲} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

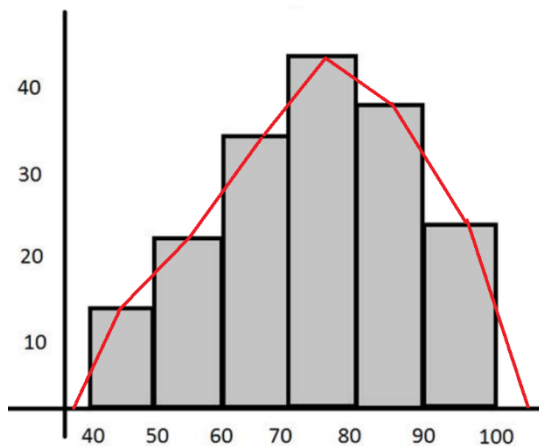
◀ **مثال:** از مطالعات سال قبل می‌دانیم انحراف معیار درآمد افراد یک جامعه ۲ میلیون تومان است. اگر درآمد ۱۶ نفر بر حسب میلیون تومان ۱۳، ۹، ۶، ۷، ۱۰، ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۲۵، ۱، ۵، ۶، ۱۲، ۹، ۸ باشد. بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای خط فقر به دست آورید.

پاسخ: $\bar{x} =$ میانگین نمونه

$$\frac{۸+۹+۱۲+۶+۵+۱+۲۵+۱۱+۹+۷+۶+۱۰+۷+۶+۹+۱۳}{۱۶} = ۹$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{\mu}{2} \leq \frac{\bar{x}}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{9}{2} - \frac{2}{\sqrt{16}} \leq \frac{\mu}{2} \leq \frac{9}{2} + \frac{2}{\sqrt{16}} \rightarrow 4 \leq \frac{\mu}{2} \leq 5 \quad \blacksquare$$

◀ **چندبر فراوانی** اگر در یک نمودار بافت‌نگاشت نقاط وسط ضلع‌های بالایی مستطیل‌ها را به هم وصل کنیم و نقطه وسط دو مستطیل اول و آخر را نیز به محور طول‌ها وصل کنیم، چندبر فراوانی به وجود می‌آید.



◀ **مثال:** داده‌های زیر نمرات ۲۴ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

۷۵ ۷۴ ۷۳ ۷۲ ۷۱ ۷۰ ۶۷ ۷۵
۷۹ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۷ ۷۵ ۸۰
۸۷ ۸۶ ۸۶ ۸۳ ۸۲ ۸۲ ۸۱ ۹۱

الف) میانگین و انحراف معیار را محاسبه کنید.

ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات جامعه را محاسبه کنید.

ج) بافت‌نگاشت فراوانی داده‌ها را رسم کنید. (در فواصل $[۶۷, ۷۱]$, $[۷۱, ۷۵]$, ...)

د) چندبر فراوانی بافت‌نگاشت را رسم کنید.

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{24} x_i}{24} = \frac{1877}{24} = 78.2$$

میانگین

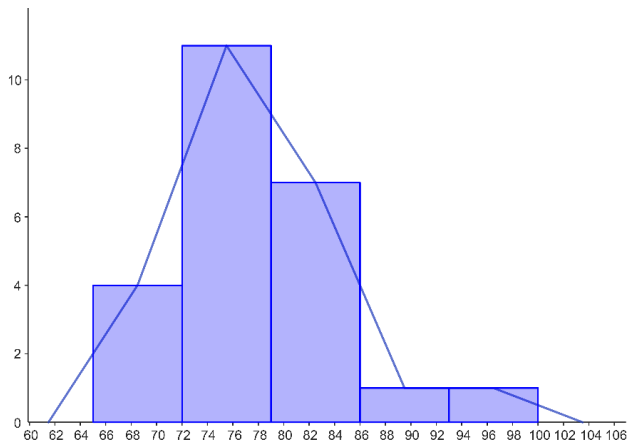
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{24} (x_i - 78.2)^2}{24} = 33.33 \rightarrow \sigma = \sqrt{33.33} = 5.7$$

واریانس

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\bar{x} \approx 78, \sigma \approx 6} 78 - \frac{6}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 78 + \frac{6}{\sqrt{36}} \rightarrow 77 \leq \mu \leq 79$$

$$75.5 \leq \mu \leq 80.5$$

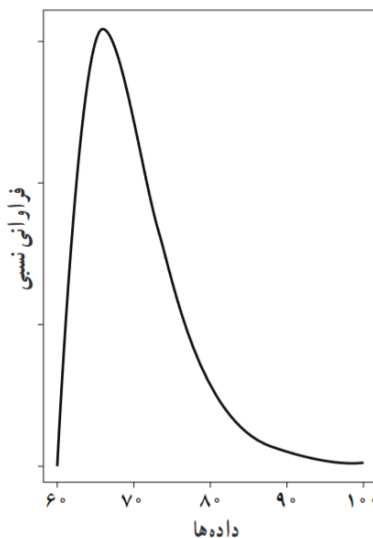
(ج) و (د) نکته: زمانی که داده‌ها به صورت گسسته هستند برای رسم نمودار بافت نگاشت بهتر است به جای دسته‌ها از کرانه‌ها استفاده کنیم.
(از ابتدای اولین دسته نیم واحد کم می‌کنیم و اولین کرانه درست می‌آید.)



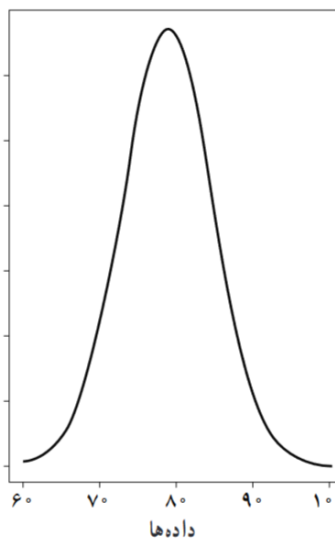
دسته‌ها	کرانه‌ها	فراوانی هر دسته
[67, 71]	70.5 - 76.5	2
[71, 75]	74.5 - 78.5	4
[75, 79]	78.5 - 82.5	9
[79, 83]	82.5 - 86.5	4
[83, 87]	86.5 - 90.5	3
[87, 91]	90.5 - 94.5	1
[91, 95]	94.5 - 98.5	1

مثال: در مثال قبل اگر تعداد داده‌های نمونه را بالا ببریم، نمودار چندبر فراوانی به کدام یک از شکل‌های زیر نزدیک می‌شود؟

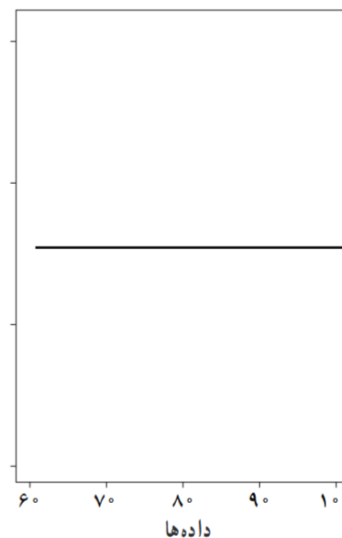
نمودار پوله (نامتقارن)



نمودار نرمال



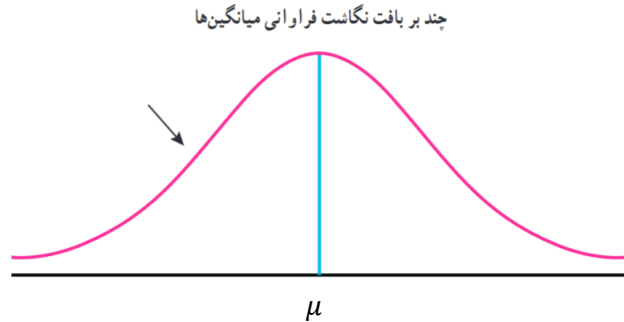
نمودار یکنواخت



پاسخ: با توجه به نمودار چندبر فراوانی در مثال قبل به نمودار نرمال نزدیک می‌شود.

♦ اگر مانند مساله قبل تعداد زیادی نمونه ۲۴ تایی به تصادف انتخاب کنیم. مثلاً ۱۰۰ نمونه ۲۴ تایی انتخاب کنیم و در هر نمونه میانگین را برآورد کنیم تعداد ۱۰۰ **برآورد نقطه‌ای** داریم.

حال فرض کنیم برای این ۱۰۰ میانگین برآورد شده یک چندبر فراوانی رسم کنیم. در این صورت نمودار چند بر فراوانی حاصل به شکل زیر نزدیک است.



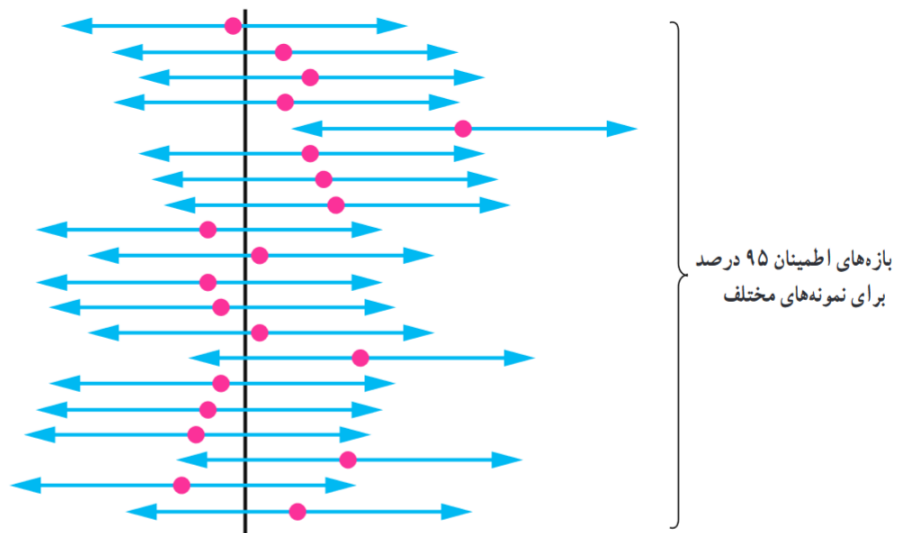
که در این نمودار μ همان میانگین جامعه است و به این منحنی یک **منحنی نرمال** می‌گویند.

♦ منظور از فاصله اطمینان ۹۵ درصد این است که اگر مثلاً ۱۰۰ نمونه آماری مختلف از یک جامعه داشته باشیم، انتظار می‌رود میانگین ۹۵ تا از این نمونه‌ها در بازه مشخص شده باشد.

در یک پژوهش آماری، ۲۰ **نمونه** ۱۰۰ عضوی مختلف انتخاب کرده‌ایم و برای هر نمونه میانگین (برآورد نقطه‌ای) و بازه اطمینان ۹۵ درصد (برآورد بازه‌ای) را حساب می‌کنیم. این محاسبه را به صورت $\longleftrightarrow$ نمایش می‌دهیم که در آن پاره خط آبی طول بازه و نقطه قرمز (وسط بازه) میانگین نمونه است.

$$\frac{95}{100} = \frac{x}{20} \rightarrow x = 19$$

در شکل زیر موقعیت هر بازه و میانگین جامعه (خط سیاه عمودی) مشاهده می‌کنید. طبیعی است که تنها **یک بازه** شامل میانگین جامعه نباشد.



◀ **مثال:** اگر ۴۰ بازه ۹۵٪ اطمینان مربوط به ۴۰ نمونه با اندازه مساوی داشته باشیم، انتظار داریم چه تعداد از این بازه‌ها شامل میانگین جامعه باشند؟

پاسخ: $\frac{95}{100} = \frac{x}{40} \rightarrow x = 38$ ۳۸ بازه شامل میانگین جامعه هستند.